METODE NUMERICE ÎN INGINERIE

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII NELINIARE

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII NELINIARE

Rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare

Un sistem de ecuații neliniare are următoarea formă generică:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

unde $f_i : R^n \rightarrow R$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII NELINIARE

Dacă se fac notațiile:

$$[X] = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \tag{2}$$

$$F = [f_1, f_2, \dots f_n]^t \tag{3}$$

atunci relația (1) poate fi scrisă sub forma:

$$F([X]) = 0 \tag{4}$$

Pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii neliniare se admite următoarea ipoteză:

în vecinătatea soluției exacte, notată cu [X*], funcțiile f_i și toate derivatele lor parțiale $\frac{\partial f_i}{\partial X_j}$ i, j = 1, n sunt continue.

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII NELINIARE

Metoda Newton-Raphson

Metoda Newton-Raphson este o metodă de tip iterativ care determină o soluţie aproximativă *X corespunzătoare unui sistem de ecuaţii neliniare.**

Se consideră cazul particular al unui sistem format din două ecuaţii neliniare cu două necunoscute:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Se admite faptul că în iteraţia *k* s-a determinat o aproximaţie (x_1^k, x_2^k), **care se abate de la soluţia exactă** (x_1^*, x_2^*) **cu valorile** $(\Delta x_1^k, \Delta x_2^k)$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII NELINIARE

Dezvoltarea în serii Taylor în jurul aproximaţiei (x_1^k, x_2^k), **a celor două ecuaţii:**

$$f_1(x_1^*, x_2^*) \cong f_1(x_1^k, x_2^k) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_1^k,\, x_2^k)} (x_1^* - x_1^k) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x_1^k,\, x_2^k)} (x_2^* - x_2^k) = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*) \cong f_2(x_1^k, x_2^k) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x_1^k,\, x_2^k)} (x_1^* - x_1^k) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_1^k,\, x_2^k)} (x_2^* - x_2^k) = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

Forme simplificate:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1^*, x_2^*) \\ f_2(x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ f_2(x_1^k, x_2^k) \end{bmatrix} + \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{(x_1^k,\, x_2^k)} \begin{bmatrix} x_1^* - x_1^k \\ x_2^* - x_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8)}$$

$$F(X^*) \cong F(X^k) + J(X^k) \cdot \Delta X^k \qquad \textbf{(9)}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII NELINIARE

Deoarece (x_1^*, x_2^*) **reprezintă soluţia exactă a problemei (5),** ***F*(*X****)** **se anulează:**

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1^k \\ \Delta x_2^k \end{bmatrix} = -\left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{(x_1^k, x_2^k)}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ f_2(x_1^k, x_2^k) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(10)}$$

$$\Delta X^k = -J^{-1}(X^k) \cdot F(X^k) \qquad \textbf{(11)}$$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$ **- matricea jacobiană** **(12)**

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII NELINIARE

Datorită neglijărilor făcute la dezvoltarea în serii Taylor, corecţiile ΔX^k nu mai asigură deplasarea completă din aproximaţia X^k până la soluţia exactă X^*, ci până la o nouă aproximaţie a acesteia:

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{k} \\ x_2^{k} \end{bmatrix} - \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{(x_1^k,\, x_2^k)}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1^k, x_2^k) \\ f_2(x_1^k, x_2^k) \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$X^{k+1} = X^k - J^{-1}(X^k) \cdot F(X^k) \tag{14}$$

Procesul de calcul este iterativ şi se opreşte atunci când este îndeplinită condiţia de convergenţă:

$$\left| X^k - X^{k-1} \right| \le \varepsilon \tag{15}$$

Metoda gradientului

Metoda gradientului face parte din categoria metodelor indirecte de descreştere.

$$\min\left(F(X)^t \cdot F(X)\right) \tag{16}$$

In cadrul metodei se defineşte o funcţie auxiliară *Ψ*, asociată sistemului de ecuaţii neliniare definit sub forma (4), în raport cu toate necunoscutele problemei.

$$\Psi(X) = \frac{1}{2} F(X)^t \cdot F(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(X)\right)^2 \tag{17}$$

Metoda gradientului utilizează pentru determinarea iterativă a unor soluţii cât mai bune gradientul funcţiei *Ψ*(*X*) (notat în cele ce urmează cu *g*):

$$g = \nabla\Psi(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\Psi}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} \end{bmatrix}^t \tag{18}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII NELINIARE

Deoarece gradientul este orientat întotdeauna în sensul creşterii valorii funcţiei *Ψ*(*X*), pentru minimizarea acestei funcţii corecţiile se vor aplica întotdeauna în sens opus gradientului:

$$X^{k+1} = X^k + \lambda^k d^k \tag{19}$$

$$d^k = -g^k = -\nabla\Psi\left(X^k\right) \tag{20}$$

λ^k reprezintă un factor de scară care modifică corecţia.

Adaptarea factorului de scară în cursul unei iteraţii se face prin rezolvarea unei a doua probleme de minimizare:

$$\Phi\left(\lambda^k\right) = \Psi\left(X^k - \lambda^k g^k\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(X^k - \lambda^k g^k\right)\right)^2 \tag{21}$$

$$\Psi\left(X^{k+1}\right) = \Psi\left(X^k - \lambda^k g^k\right) \overset{not}{=} \Phi\left(\lambda^k\right) \tag{22}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII NELINIARE

Dacă factorul de scară λ^k are o valoare suficient de mică atunci, prin dezvoltarea în serii Taylor a funcţiilor f_i în jurul punctului X^k toţi termenii de rang superior lui 1 se vor neglija:

$$\Phi\left(\lambda^k\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(X^k - \lambda^k \frac{\partial f_i}{\partial X}\Big|_{X^k} g^k\right)\right)^2 \quad \textbf{(23)}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda^k} = -\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left(X^k\right) - \lambda^k \frac{\partial f_i}{\partial X}\Big|_{X^k} g^k\right)\cdot \frac{\partial f_i}{\partial X}\Big|_{X^k} g^k = 0 \quad \textbf{(24)}$$

$$\lambda^k = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\left(X^k\right)\frac{\partial f_i}{\partial X}\Big|_{X^k} \cdot g^k}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X}\Big|_{X^k} \cdot g^k\right)^2} \quad \textbf{(25)}$$

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUATII LINIARE

Formula (25) poate fi scrisă în formă simplificată:

$$\lambda^{k} = \frac{(g^{k})^{t} \cdot g^{k}}{(d^{k})^{t} \cdot (J^{k})^{t} \cdot J^{k} \cdot d^{k}} \tag{26}$$

$$g^{k} = (J^{k})^{t} \cdot F^{k} \tag{27}$$

Ţinând cont de relaţia (26), relaţia (19) devine:

$$X^{k+1} = X^{k} + \frac{(g^{k})^{t} \cdot g^{k}}{(d^{k})^{t} \cdot (J^{k})^{t} \cdot J^{k} \cdot d^{k}} d^{k} \tag{28}$$